

BACKSTEPPING – МЕТОД СИНТЕЗА УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ОБЪЕКТОВ

¹Чебыкин Д.В.

¹ФГАОУ ВПО «Уральский Федеральный Университет имени первого Президента России Б. Н. Ельцина», Екатеринбург, Россия (620002, Екатеринбург, ул. Мира, 19), e-mail: chebykin.daniil@ya.ru

В данной работе описан метод бэкстеппинг (backstepping), который использовался при синтезе систем управления для нелинейных объектов управления первого и второго порядков. Объект первого порядка имеет сложное математическое описание, которое трудно линеаризовать. Объект второго порядка раскрывает весь алгоритм метода бэкстеппинг. В основе этого метода лежит критерий устойчивости по Ляпунову. Суть метода состоит в последовательном обходе каждого интегратора системы, путем добавления отрицательной обратной связи. После обхода всех интеграторов выводится закон управления для исходного объекта. При создании системы управления таким способом перед разработчиком встает задача выбора функции Ляпунова и выбора коэффициентов полученного регулятора. Бэкстеппинг дает ощутимое преимущество по времени при синтезе управления, так как не требует линеаризации объекта. Проведено математическое моделирование полученных систем управления и доказана работоспособность метода.

Ключевые слова: бэкстеппинг, критерий устойчивости по Ляпунову, система управления

BACKSTEPPING – METHODS OF SYNTHESIS OF NONLINEAR CONTROL

¹Chebykin D.V.

¹Ural Federal University named after the first President of Russia B.N.Yeltsin, Ekaterinburg, Russia (620002, 19 Mira street, Ekaterinburg, Russia), e-mail: chebykin.daniil@ya.ru

This article describes the method bekstepping, which was used to synthesis of control systems for nonlinear control objects first and second order. The object of the first order has a complex mathematical description, which is difficult to be linearized. The object of the second order reveals the whole algorithm method bekstepping. The basis of this method is the Lyapunov stability criterion. The method consists in the sequential approach of each system integrator, by adding negative feedback. After it we will get control law for the original object. When you create a control system in such a way before the developer gets the task of choosing the Lyapunov function and choice of the coefficients obtained regulator. Bakstepping gives a significant advantage in the synthesis of control, because it does not require linearization. The mathematical modeling of control systems was obtained and proven performance of the method.

Key words: backstepping, Lyapunov stability criterion, control system

Введение

Построение нелинейного управления с обратной связью – это сложная задача, решение которой требует разработки различных систематических процедур, предназначенных для достижения тех или иных целей управления и позволяющих удовлетворить определенным техническим условиям на проектирование. Очевидно, что отдельно выбранная процедура не может быть успешно применена ко всем нелинейным системам. В этой статье будет рассмотрен метод для синтеза управления нелинейной системой – бэкстеппинг (backstepping).

Целью данной работы было ознакомление с синтезом законов управления для нелинейных объектов малых порядков методом бэкстеппинга.

Бэкстеппинг – это рекурсивная процедура, в которой совмещены задачи нахождения функции Ляпунова и соответствующего закона управления. Согласно этому методу, задача разработки закона для управления всей системы разбивается на последовательность соответствующих подзадач для подсистем меньшего порядка (или скалярных систем). Так как при анализе скалярных систем и систем малого порядка исследователь обладает большой свободой, метод бэкстеппинга часто позволяет сравнительно легко решить задачи стабилизации и слежения с использованием робастного управления в условиях менее ограничительных, чем в случае использования других методик [3] (метод скользящего режима, метод ляпуновского синтеза, метод управления на основе пассивности и др.)

Алгоритм бэкстеппинга заключается в том, чтобы сделать каждый интегратор объекта устойчивым, путем добавления ОС, вычисленной по этому алгоритму. Алгоритм взят из [4], [5] и представляет собой набор действий, выполняемых для каждого дифференциального уравнения математического описания объекта.

Начнем исследование метода с линейного звена – интегратора:

$$\dot{x} = u.$$

По методу бэкстеппинга ищется функция Ляпунова и она будет равна $V = \frac{1}{2}x^2$. Далее берем производную функции Ляпунова:

$$\frac{dV}{dt} = x \frac{dx}{dt} = xu.$$

Из теоремы Ляпунова [1] чтобы система была устойчивой, его производная должна быть отрицательно полуопределенной. То есть: $xu \leq -W$, где W – некоторая положительная функция, которая принимает значение 0 при $x = 0$. В качестве W удобно выбирать сумму квадратов вектора состояния. В этом случае возьмем $W = kx^2$, $k > 0$. Отсюда

$$\begin{aligned} xu &\leq -kx^2, \\ u &= -kx. \end{aligned}$$

Таким образом без больших затрат было получено управление для линейного звена. При этом при увеличении коэффициента k – уменьшается величина времени регулирования и увеличивается модуль управляющего сигнала.

Рассмотрим объект первого порядка с нелинейностью:

$$\frac{dh}{dt} = \frac{1}{A} v_h a - \frac{a}{A} \cdot \mu \cdot \varphi \cdot \sqrt{2gh(1-\beta) + \beta v_h^2 + 2\beta gh_T},$$

$$v_h = 0.9104u - 0.8363.$$

Управляющий вход (напряжение на насосе) – u , состояние системы (уровень жидкости в баке) – h . Это модель бака из [2].

Линеаризация этого объекта очень громоздкая и сложная и приведена в [2], поэтому разработка управления для нелинейной системы без линеаризации очень актуальна.

Ищем функцию Ляпунова $V = \frac{1}{2}h^2$ и ее производную

$$\begin{aligned}\dot{V} &= h\dot{h} = \\ &= h \left(\frac{1}{A} a 0.9104u - \frac{a}{A} 0.8363 - \frac{a}{A} \cdot \mu \cdot \varphi \cdot \sqrt{2gh(1-\beta) + \beta v_h^2 + 2\beta gh_T} \right) = \\ &= h \left(\frac{1}{A} a 0.9104u - \frac{a}{A} 0.8363 \right) - h \left(\frac{a}{A} \cdot \mu \cdot \varphi \cdot \sqrt{2gh(1-\beta) + \beta v_h^2 + 2\beta gh_T} \right) \leq -W.\end{aligned}$$

Проанализируем производную функции Ляпунова:

$$\frac{a}{A} \cdot \mu \cdot \varphi \cdot \sqrt{2gh(1-\beta) + \beta v_h^2 + 2\beta gh_T} - \text{всегда положительная};$$

h – характеризует уровень столба жидкости в баке и эта величина строго положительная; следовательно все второе слагаемое величина положительная и мы можем ее включить в функцию

$W = kh^2 + h \frac{a}{A} \cdot \mu \cdot \varphi \cdot \sqrt{2gh(1-\beta) + \beta v_h^2 + 2\beta gh_T}$, чтобы исключить ее из формирования управления.

Тогда получаем:

$$h \left(\frac{1}{A} a 0.9104u - \frac{a}{A} 0.8363 \right) \leq -kh^2.$$

Откуда:

$$u = \frac{\left(\frac{a}{A} 0.8363 - kh \right)}{\frac{a}{A} 0.9104}.$$

Результаты моделирования такой системы управления представлены на рис. 1.

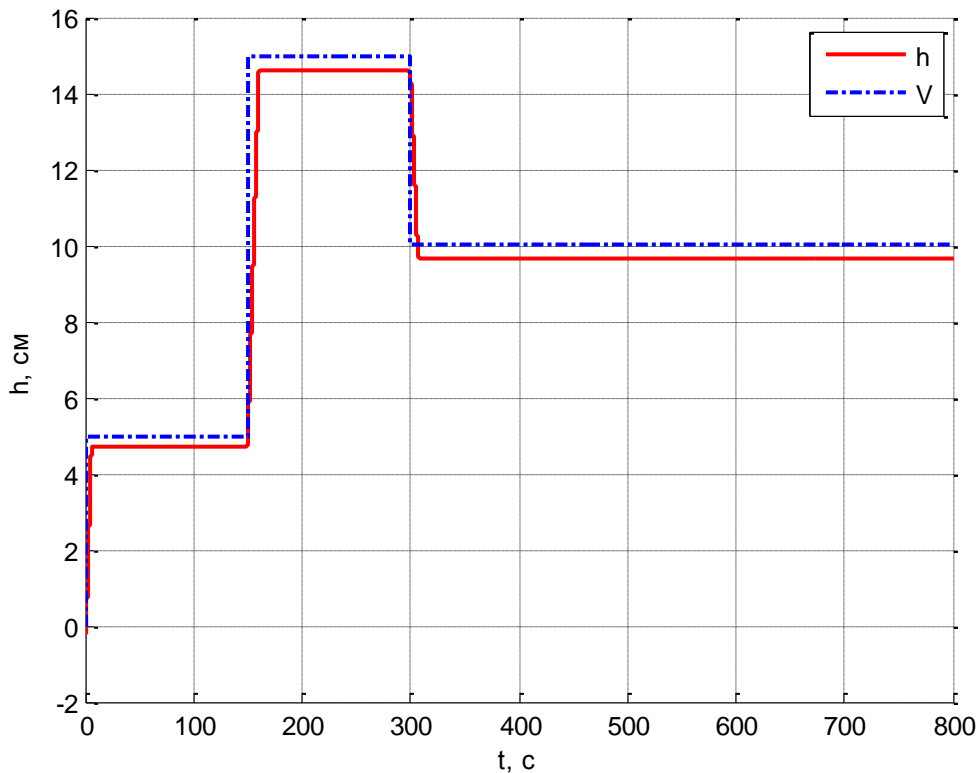


Рис. 1. Уровень воды в баке h и командный сигнал V

На рисунке 1 видно, что полученная система управления имеет статическую ошибку. Чтобы избавиться от нее необходимо расширить математическое описание и провести синтез управления с помощью метода бэкстеппинга для полученной системы. Здесь величина k определяет скорость переходных процессов в сигнале управления, это в свою очередь оказывает влияние на процессы в системе (смена режима набора воды и удержания заданного уровня происходит быстрее при увеличении k).

Теперь покажем работу алгоритма на нелинейном объекте второго порядка:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = 5 \sin(x_1) + u \end{cases}$$

Рассмотрим первое уравнение, и, фактически, в нем x_2 –управляющий вход. Функция Ляпунова для этого уравнения будет $V_1 = \frac{1}{2}x_1^2$. Из этого следует $\dot{x}_1 = -k_1 x_1$. Это будет стабилизировать один интегратор. Но, мы не можем управлять x_2 напрямую. Вместо этого мы задаем желаемое значение:

$$x_{2d} = \alpha(x) = -k_1 x_1.$$

В этом случае, мы назовем x_2 - виртуальным управлением; функцию $\alpha(x)$ – стабилизирующей функцией; отклонение x_2 от $\alpha(x)$ ошибкой состояния z .

$$z = x_2 - x_{2d} = x_2 - \alpha(x) = x_2 + k_1 x_1.$$

Мы можем использовать эту ошибку состояния, чтобы переписать нашу систему:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = z + x_{2d} = z - k_1 x_1 \\ \dot{z} = \dot{x}_2 - \dot{\alpha}(x) = 5 \sin(x_1) + u + k_1 \dot{x}_1 = 5 \sin(x_1) + u + k_1(z - k_1 x_1) \end{cases}$$

Теперь нам также нужно включить z в нашу функцию Ляпунова.

Возможная функция:

$$V(x_1, z) = \frac{1}{2} x_1^2 + \frac{1}{2} z^2.$$

Ее производная:

$$\begin{aligned} \dot{V}(x_1, z) &= x_1(z - k_1 x_1) + z(5 \sin(x_1) + u + k_1(z - k_1 x_1)) = \\ &= -k_1 x_1^2 + z(x_1 + 5 \sin(x_1) + u + k_1 x_2) \leq -W_2. \end{aligned}$$

Здесь выбираем: $W_2 = k_1 x_1^2 + k_2 z^2$.

Получаем:

$$x_1 + 5 \sin(x_1) + u + k_1 x_2 \leq -k_2 z.$$

Отсюда:

$$\begin{aligned} u &= -k_2 x_2 - k_2 k_1 x_1 - x_1 - 5 \sin(x_1) - k_1 x_2 = \\ &= -x_1(1 + k_1 k_2) - x_2(k_1 + k_2) - 5 \sin(x_1). \end{aligned}$$

Как можно видеть из полученного выражения для управляющего сигнала оно зависит от всего вектора состояния и учитывает нелинейность объекта. Полученные переходные процессы показаны на рис. 2.

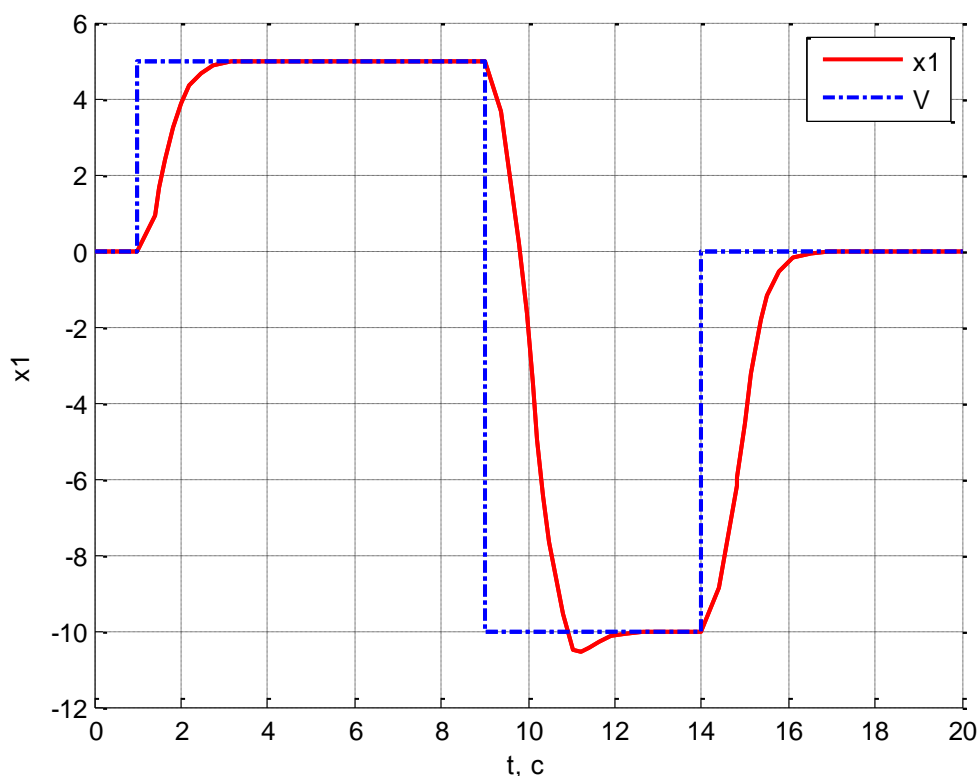


Рис. 2. Выход объекта управления x_1 и командный сигнал V

Перебор коэффициентов k_1 и k_2 выявил, что первый больше влияет на величину перерегулирования, а второй на время переходного процесса.

При разработке управления методом бэкстеппинга встает задача выбора коэффициентов регулятора. Она может быть решена с помощью библиотеки Simulink Control Design.

Заключение

Метод бэкстеппинга позволяет избежать трудной линеаризации и связанных с этим ограничений (действительность матописания вблизи точки линеаризации); позволяет увеличить скорость синтеза систем управления. Этот метод, как и все нелинейные методы не универсален и требует от разработчика некоторого опыта, который поможет выбрать коэффициенты обратной связи.

В данной работе был описан метод бэкстеппинга, который использовался для синтеза систем управления представленных объектов.

Было проведено математическое моделирование полученных систем управления (рис. 1, 2) и доказана работоспособность метода.

Список литературы

1. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. – М. ГИФМЛ, 1961. – 436 с.
2. Страшинин Е. Э. Исследование и синтез управления для системы связанных баков: лабораторный практикум / Е. Э. Страшинин, Д. В. Чебыкин. – Екатеринбург : Изд-во урал. ун-та, 2014. – 74с.
3. Халил Х.К. Нелинейные системы. – М.–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных исследований, 2009. – 832 с.
4. Aerospace Students. Home for future Aerospace Engineers [Электронный ресурс]. — Режим доступа: <http://aerostudents.com/files/advancedFlightControl/backstepping.pdf> (дата обращения 10.11.2014)
5. Clemson University [Электронный ресурс]. — Режим доступа: <http://www.clemson.edu/ces/crb/ece874/Lemmon/Lectures/lecture-25.pdf> (дата обращения 10.11.2014)